14/12/2016

Θεωράμε προς το παρον δεδομένο (θα το αποδείξουμε παρακάτω)

οτι αν $f: I \to \mathbb{R}$. I διάστημα

f παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του I

α) $f'(x) > 0$ για κάθε x εσ. σημείο του I
τότε f γν. αύξουσα

β) $f'(x) < 0$ για κάθε x εσ. σημείο του I
τότε f γν. φθίνουσα

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = 2x - \sin x$

$f'(x) = 2 - \cos x \geq 1 > 0$ άρα f γν. αύξουσα

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ορίζεται η f^{-1} $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και είναι γν αύξουσα αλλά δε γνωρίζουμε το y. Δεν υπάρχει τύπος που να δίνει το x συναρτήσει του y όταν $y = 2x - \sin x$.

Παρόλα αυτά μπορούμε να υπολογίσουμε την $(f^{-1})'(y)$ για διάφορα y. Από το Θεωρ. Παραγ. Αντίστροφης Συναρτ.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2-\cos(f^{-1}(y))}$$

$f(0)=0$, $f'(0)=1$

Άρα $f^{-1}(0)=0$ $\quad (f^{-1})'(0) = \frac{1}{2-\cos 0} = \frac{1}{2-1} = 1$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \pi - 1$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Έτσι $f^{-1}(\pi-1) = \frac{\pi}{2}$ $\quad (f^{-1})'(\pi-1) = \frac{1}{2-\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^5 + 2x^3 + 1$ $\quad f'(x) = 5x^4 + 6x^2 = x^2(5x^2+6) \geq 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

f γν. αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ (διότι $f'(x) > 0 \ \forall x \in (-\infty, 0)$)
και f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$ (διότι $f'(x) > 0 \ \forall x \in (0, +\infty)$)

Επομένως $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα
Επίσης $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. (λόγω συνέχειας της f)
Άρα ορίζεται η f^{-1} $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f^{-1}$ συνεχής, f^{-1} γν. αύξουσα

$f(-1) = -2$	Άρα $f^{-1}(-2) = -1$
$f(0) = 1$	$f^{-1}(1) = 0$
$f(1) = 4$	$f^{-1}(4) = 1$
$f(2) = 49$	$f^{-1}(49) = 2$

Εφόσον η εξίσωση $y = x^5 + 2x^3 + 1$ δεν λύνεται ως προς x
δεν έχω τύπο για την f^{-1}

<u>Ερώτημα</u> Να εξεταστεί αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $-2, 1, 4, 49$ και σε όσα είναι παραγ. να βρεθεί η παράγωγος

$f^{-1}(-2) = -1$ και εφόσον $f'(-1) = 11 \neq 0$
άρα $(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{11}$

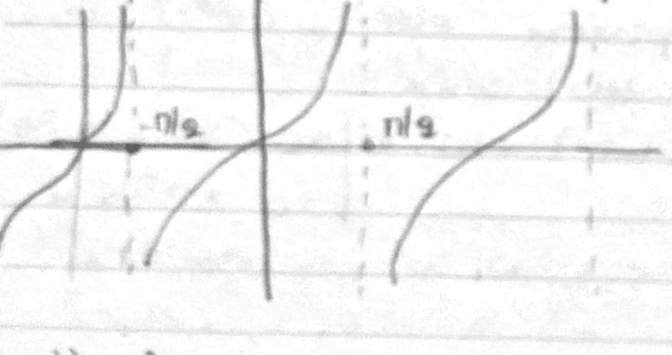
$f^{-1}(1) = 0$ και εφόσον $f'(0) = 0$ η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1. και μάλιστα $(f^{-1})'(1) = +\infty$

$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{11}$ παραγωγ.

$(f^{-1})'(49) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{104}$ παραγωγίσ.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι παράγωγοί τους

1) Θεωρούμε τη συνάρτηση tan



Περιορισμένη διαστ. τη συνάρτηση $f: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$
$\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$
Άρα η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα
και $f((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$

Διότι $\lim\limits_{x\to(-\pi/2)^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} f(x) = +\infty$.

Η συνάρτηση <u>τόξο εφαπτομένης</u>
είναι η συνάρτηση $\arctan = f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

Η συνάρτηση arctan είναι παραγωγίσιμη. Έστω $y \in \mathbb{R}$.
τότε $y = f(x) = \tan x$ για κάποιο (μοναδικό)
$x \in (-\pi/2, \pi/2)$. $f'(x) > 0$ (αφού $f'(x) \neq 0$)

Άρα από το θεώρημα παραγώγισης αντίστρ. συνάρτ.

$$(\arctan)'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\arctan y)}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

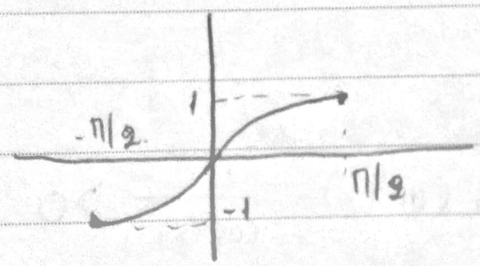
$\arctan(0) = 0$ $\arctan(-\sqrt{3}/3) = -\pi/6$

$\arctan(\sqrt{3}/3) = \pi/6$ $\arctan(-1) = -\pi/4$

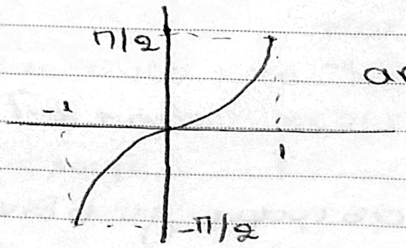
$\arctan(1) = \pi/4$ $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$

$\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$ ~~arctan(,)~~.

2). Θεωρούμε τον περιορισμό της συνάρτησης sin
στο $[-\pi/2, \pi/2]$, δηλ. τη συνάρτηση
$h : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ $h(x) = \sin x$
Η h είναι 1-1 και επί με $h'(x) = \cos x \begin{cases} > 0 & \forall x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ = 0 & x = -\pi/2 \text{ ή } x = \pi/2 \end{cases}$



Η συνάρτηση <u>τόξο ημιτόνου</u> είναι η συνάρτηση
$\arcsin = h^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \frac{\pi}{2}]$ είναι γν. αύξουσα
(ως αντιστροφή γν. αύξουσας)



Αν $y \in (-1, 1)$ τότε $y = h(x)$ για
κάποιο (μοναδικό)
$x \in (-\pi/2, \pi/2)$
$h'(x) \neq 0$.
Άρα η h^{-1} είναι παραγωγίσιμη
στο y.

$$(\arcsin)'(y) = (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} = \frac{1}{h'(x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos x} \underset{\cos x > 0}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Στα δύο άκρα -1 και 1 η $\arcsin = h^{-1}$ δεν είναι
παραγωγίσιμη. (Διότι $-1 = h(-\pi/2)$ και $h'(-\pi/2) = 0 = \cos(-\pi/2)$
$1 = h(\pi/2)$ και $h'(\pi/2) = 0 = \cos(\pi/2)$.

$\sin(-\pi/2) = -1$ $\arcsin(-1) = -\pi/2$
$\sin(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ $\arcsin(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$
$\sin(-\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ $\arcsin(-\sqrt{2}/2) = -\pi/4$
$\sin(-\pi/6) = -1/2$ $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$
$\sin(0) = 0$ $\arcsin(0) = 0$

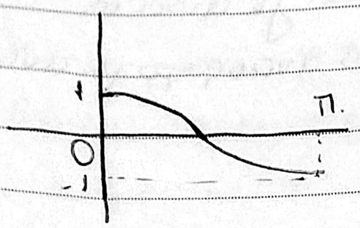
3) Θεωρούμε τη συνάρτηση cos περιορισμένη στο
$[0, \pi]$ δηλ. $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$ με $g(x) = \cos x$

$$g'(x) = -\sin x \begin{cases} < 0 & \forall x \in (0, \pi) \\ = 0 & x = 0 \text{ ή } x = \pi \end{cases}$$

είναι 1-1 και επί

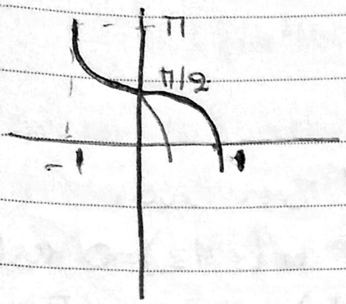
Η g είναι γν. φθίνουσα στο $[0, \pi]$
Η συνάρτηση <u>τόξο συνημιτόνου</u>

είναι η συνάρτηση $\arccos = g^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$



Η arccos είναι γν. φθίνουσα (ως αντίστροφη γν. φθίνουσας)
Για $y \in (-1,1)$ υπάρχει μοναδικό $x \in (0,\pi)$ ώστε
$y = g(x) = \cos x \quad g'(x) < 0$
άρα $(\arccos)'(y) = (g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \dfrac{1}{g'(x)}$

$$= \frac{1}{-\sin x} \underset{\sin x > 0}{=} \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$



$\cos(0) = 1 \qquad \arccos(1) = 0$
$\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi/6$
$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \qquad \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$
$\cos(\pi/3) = 1/2 \qquad \arccos(1/2) = \pi/3$
$\cos(\pi/2) = 0 \qquad \arccos(0) = \pi/2$
$\cos(2\pi/3) = -\frac{1}{2} \qquad \arccos(-1/2) = \frac{2\pi}{3}$
$\cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2 \qquad \arccos(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4$

Ασκήσεις Φυλλάδιο 4ο

i) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (\forall x \in D(f)$
αν $0 < |x-a| < \delta$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon.) *$

ii) $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (\forall h : a+h \in D(f)$
αν $0 < |h| < \delta$ τότε $|f(a+h) - \ell| < \varepsilon.) **$

(i) ⇒ (ii) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε από το (i) υπάρχει $\delta > 0$
ώστε ( ) *
Για αυτό το δ έχουμε
Θεωρούμε τυχαίο h με $a+h \in D(f)$ $0 < |h| < \delta \Rightarrow 0 <$

$< |(a+h) - a| < \delta \overset{()^*}{\Longrightarrow} |f(a+h) - \ell| < \varepsilon.$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Εστω $\varepsilon > 0$ Απο τη (ii) $\exists \delta > 0$ ωστε $()^{**}$
Για αυτο το δ έχουμε:
Για κάθε $x \in D(f)$ με $0 < |x-a| < \delta$ απο την $()^{**}$
έχουμε $|f(a+(x-a)) - \ell| < \varepsilon$ δηλ $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Ασκηση 5.

Εστω $a \geq 0$. Να δ.ο. $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Αποδ
1η περίπτωση Για $a > 0$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

Εστω $\varepsilon > 0$ Θετουμε $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$
Για καθε $x \geq 0$ με $|x-a| < \delta$
$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

2η περίπτωση
$a = 0$ Θελουμε δηλ. ν.δ.ο. $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$
Εστω $\varepsilon > 0$ Θέτουμε $\delta = \varepsilon^2$
Για κάθε $x \geq 0$ με $|x - 0| < \delta$
ισχυει $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$

Ασκηση 6.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 3+x & x \geq 2 \end{cases}$$

$f(2) = 5$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3+x) = 5$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2) = 4$

η f δεν είναι συνεχής στο σημείο 2.

β) Αναζητάμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο $\mathbb{R}$.
με $x_n \to 2$
και $f(x_n) \not\to f(2)$.

Θέτουμε $x_n = 2 - \frac{1}{n}$
$x_n \to 2$
$\forall n$ $f(x_n) = x_n^2 = (2-\frac{1}{n})^2 \to 4 \neq 5 = f(2)$.
διότι $x_n < 2$
Άρα $f(x_n) \not\to f(2)$
Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο 2

Άσκηση 7
f, g $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(i) f συνεχής $\Rightarrow$ $|f|$ συνεχής
Απ. Αληθής
Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ έστω $\varepsilon > 0$
Εφόσον f συνεχής στο x_0 $\exists\, \delta > 0 : \forall x$ αν $|x-x_0| <$
τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Για το παραπάνω δ
$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
$\forall x$ $|x-x_0| < \delta$
Άρα $|f|$ συνεχής στο x_0

(ii) $|f|$ συνεχής $\Rightarrow$ f συνεχής
Απ. ΟΧΙ

Π.χ. για τη συνάρτηση
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

η f είναι ασυνεχής (και μάλιστα σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$)
Έστω η $|f|$ είναι συνεχής ως σταθερή

(iii) f συνεχής $\Rightarrow f^2$ συνεχής;
Απ. Ναι f^2 συνεχής ως γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων

(iv) f^2 συνεχής $\Rightarrow f$ συνεχής;
Απ. Όχι
Παρ. η συνάρτηση που δώσαμε στο (ii)

(v) f, g ασυνεχείς παντού $\Rightarrow f+g$ ασυνεχής;
Απ. Όχι

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases} \quad \Big| \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

f, g ασυνεχείς παντού $f+g=0$ συνεχής

(vi) f, g ασυνεχείς παντού $\Rightarrow f \cdot g$ ασυνεχής;
Απ. Όχι
π.χ. Για τις συναρτήσεις του προηγ. παρ.
$f \cdot g = 1$ συνεχής

(vi) $\lim_{x\to 0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x^2) = L$
Απ. Ναι
<u>Αποδ.</u> Έστω $\varepsilon > 0$
Από την υπόθεση $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε
$\forall x \quad 0 < |x-0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
Θέτω $\delta = \sqrt{\delta_1}$
Για κάθε x με $0 < |x| < \delta \Rightarrow 0 < |x^2 - 0| < \delta^2 = \delta_1$
$|f(x^2) - L| < \varepsilon$
$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ Επομένως $\lim_{x\to 0} f(x^2) = L$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$

Απ. Όχι

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = 1$

ενώ δεν υπάρχει το όριο $\lim f(x)$ διότι τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά.